MA1 – řešení 4. domácího úkolu

(i s dobrovolným „samocvičením")

(opět platí, jako v řešení 3.dú, že mé řešení úloh je jediné možné)

① Vypočti limitu posloupnosti

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 1$$

(vytknutím „n^2" v čitateli „srovnáváme „nekonečna") (AL + $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$)

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^2\left(3+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{3+\frac{1}{n}}$$

ale – označme-li $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{3n^2+n}$, pak

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3+\frac{1}{2k}} = \frac{1}{3} \quad (AL), \text{ a}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{-1}{3+\frac{1}{2k+1}} = -\frac{1}{3} \quad (AL),$$

tedy (dle věty o limitě podposloupnosti dané posloupnosti) posloupnost $\left(\dfrac{(-1)^n n^2}{3n^2+n}\right)$ nemá limitu.

c) $$\lim \frac{n^n - 2n!}{n^4 - 3n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^n}\left(1 - 2\frac{n!}{n^n}\right)}{\cancel{n^n}\left(\frac{n^4}{n^n} - 3\right)} = -\frac{1}{3}$$

(*) a AL

1) „vytkneme" n^n – „nejrychlejší" ∞

2(*) $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^4}{n^n} = 0$ (viz přednáška cvičení 12.3.)

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$, $a>0$

1) $a=1$ jasné! $(=0)$

2) $a>0$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-n} = 0$, a tedy

(opět „srovnáváme ∞")

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} \ \text{„}=\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{a^n}(1-a^{-2n})}{\cancel{a^n}(1+a^{-2n})} = 1$$

$(AL + \lim\limits_{n\to\infty} a^{-2n} = 0)$

3) $0<a<1$: $\lim a^n = 0$, $\lim a^{-n} = +\infty$, tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{-n}(a^{+2n}-1)}{a^{-n}(a^{+2n}+1)} = -1$$

$(AL + \lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} = 0)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n - \sin n}{n + \cos n}$ „$=\dfrac{\infty}{\infty}$" $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n}\left(1 - \frac{\sin n}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1 + \frac{\cos n}{n}\right)} = 1$ (AL a(*))

($\lim(n - \sin n) = +\infty$ – VOS, neboť $n - \sin n > n-1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = +\infty$,

a analog. $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\cos n) = +\infty$)

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$ dle VOS (věta o strážnících)

$\forall n$: $-\dfrac{1}{n} \le \dfrac{\sin n}{n} \le \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0$

(„stejně" i $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$)

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = „\dfrac{\infty-\infty}{\infty}" \underset{(*)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} =$

(*): užijeme „trik" (z písemného cvičení):

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= „\frac{1}{\infty}" = 0 \quad (AL)$$

nebo dále (dál) – dle (*) uvedené $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

a pak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = „\dfrac{0}{\infty}" = 0$ (dle AL)

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}\right) = „\infty-\infty" \underset{„\text{trik} (*)"}{=}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}} = „\frac{\infty}{\infty}"$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\ 1}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1}{2} \quad (AL)$$

$$\left(\lim \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n^2} = 0 \right)$$

<u>Poznámka</u> – tento příklad ukazuje, že „$\infty-\infty$" nemusí být $\underline{\underline{0}}$!

(2) <u>Dokažte, že platí:</u>

a) (1) $\lim a_n = a \in R$,
(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : |a_n - b_n| < \varepsilon$ $\Big\} \Rightarrow \lim b_n = a$

„Z definice" můžeme ukázat, že platí:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_2 \in N\ \forall n > n_2 : |b_n - a| < \varepsilon$

zvolme $\varepsilon > 0$: pak z (1) k $\varepsilon > 0$ ex. n_1: $n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$
z (2) k $\varepsilon > 0$ ex. n_0: $n > n_0 \Rightarrow |a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

pak, zvolíme-li $n_2 = \max(n_1, n_0)$, pro $n > n_2$ platí (1) i (2)
a tedy $|b_n - a| \leq |b_n - a_n| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ (cbd)

<u>Nebo asi jednodušší důkaz:</u>

Tvrzení (2) znamená (opět definice limity posloupnosti), že $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$; a pak, protože (1) $\lim a_n = a$,

máme $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n + a_n) \underset{(AL)}{=}$ (limity jsou vlastní)

$= \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim a_n = \underline{0 + a} (= a)$

b) <u>$\lim a_n = a,\ a > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$</u>

<u>Pozn.: pro $a = 0$ tvrzení neplatí</u>: $a_n = \frac{1}{2^n}$,

pak $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, ale $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$!

<u>Důkaz:</u> (nepř.)

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0 \Rightarrow$ k $\varepsilon = \frac{a}{2}$ existuje $n_0 \in N$ tak, že pro $n > n_0$ je $a - \frac{a}{2} < a_n$, tj. $a_n > 0$ a $\sqrt[n]{a_n}$ je definováno

(lze tak předpokládat, že $a_n > 0$ pro $\forall n \in N$)
nebo si zlepšete zadání – nechť $a_n \geq 0$)

2) dále –
(z definice limity): k $\varepsilon = \frac{a}{2}$ vezmeme n_0 (z 1) a platí pro $n > n_0$ jistě

$$a - \frac{a}{2} < a_n < a + \frac{a}{2} \quad , \text{tj.}$$

$$\frac{a}{2} < a_n < \frac{3}{2}a \quad , \text{tedy}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3}{2}a}$$

ale (základní „taková" limita) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a}{2}} = \lim \sqrt[n]{\frac{3}{2}a} = 1$,

tedy, užijeme-li větu „o strážnících" (VOS), víme, že $\lim \sqrt[n]{a_n}$ existuje a že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

<u>A užití při výpočtu:</u>

(i) $\underline{\lim \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 4 \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} = 4 . 1 , = \underline{4}$

neboť $\lim\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right) = 0 + 0 + 1$ a

užijeme předchozí tvrzení;

nebo
(ii) <u>(jednodušší asi)</u>

$$4 = \sqrt[n]{4^n} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} \leq \sqrt[n]{3 . 4^n} = 4 \sqrt[n]{3}$$

a tedy ($\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$) dle věty VOS je $\lim \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} = 4$

(3) Vyšetření limity rekurentně definované posloupnosti (a_n),
$$a_1 = 10, \quad a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$
je v domácím úkolu 3 (mezi řešením nepovinných příkladů).

Jen zde upozorňuji – pozor! Pro „přechod“ k limitě ve vztahu, kterým se posloupnost definuje, tj.
$$a_{n+1} = f(a_n), \quad a_1 \text{ – dáno}$$
je třeba vědět, že posloupnost (a_n) má vlastní limitu!

Příklad: (a_n): $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (-1) \cdot a_n \quad \ldots (*)$

a přejdeme-li „“ v $(*)$ k limitě (označme $\lim a_n = L$), „pak dostaneme $L = -L \Rightarrow L = 0$

ale $(a_n) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$ limitu nemá!

(4) A trochu o „cauchyovských“ posloupnostech:

a) Definice: (a_n) je cauchyovská posloupnost, když platí:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n > n_0 : \ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Je-li $a_n = \frac{1}{n}$, pak můžu ukázat, že ke „ libovolnému“ $\varepsilon > 0$ najdeme n_0 tak, že pro $n > n_0$, $m > n_0$ je

$(*)$ $\left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$; můžeme (BÚNO) předpokládat, že $m > n$.

Pak $\left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}$ a zvolíme-li n_0 tak, aby $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$, tj. $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$, pak pro $m, n > n_0$ $(*)$ platí.
(a to jsme měli ukázat)

Poznámka: Srovnejte řešení příkladu s důkazem věty, která říká, že každá konvergentní posloupnost je konvergentní.

b) Je-li (a_n) cauchyovská, a podposloupnost (a_{k_n}) je konvergentní, a $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$, pak také $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(důležité tvrzení o limitě cauchyovských posloupností)

Dk: Víme, že

(1) $\forall \varepsilon>0\ \exists n_1\ \forall n>n_1, m>n_1 : |a_n - a_m| < \varepsilon$

(2) $\forall \varepsilon>0\ \exists n_2\ \forall n>n_2 : |a_{k_n} - a| < \varepsilon$

a máme ukázat, že platí:

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

Zvolme tedy $\varepsilon>0$:

z (1) $\exists n_1\ \forall m,n>n_1 : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

z (2) $\exists n_2\ \forall n>n_2 \quad |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

vezmeme $n_0 = \max(n_1, n_2)$, pak pro $n>n_0$ dostaneme

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| \underset{(1)\ \ (2)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(1) (pro $n>n_0$ je $n>n_1$ a je $|a_n - a_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$, $k_n > n > n_1$)

(2) a (pro $n>n_0$ je $n>n_2$ a je tedy $|a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ –"–)

A dobrovolné „samoočičení"

(5*) a) Dokažte: $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$, $a<1 \Rightarrow \lim a_n = 0$
($a_n \neq 0$)

Řešení:
Je-li $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a < 1$, pak (z definice limity) ke zvolenému $a<q<1$ existuje $n_0 \in N$ tak, že pro vš. $n > n_0$ je $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1$, a pak

$$(*) \quad |a_{n+1}| < q|a_n| < q^2|a_{n-1}| < \dots < q^{n-n_0}|a_{n_0+1}|$$

Máme tedy:
$$0 \le |a_{n+1}| \le q^n \cdot \frac{|a_{n_0+1}|}{q^{n_0}}$$

a $\lim q^n \frac{|a_{n_0+1}|}{q^{n_0}} = 0 \quad (0<q<1)$, tedy užitím VOS je $\lim |a_n| = 0$, což je ekvivalentní s $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (cbd.)

b) Je-li $a_n > 0$, $\lim \sqrt[n]{a_n} = a > 1 \Rightarrow \lim a_n = +\infty$

Řešení: zvolme $1 < q < a$; pak z definice limity posloupnosti plyne, že k $\varepsilon = a - q > 0$ ex. n_0 tak, že

$$a - (a-q) < \sqrt[n]{a_n} < a + (a-q), \text{ tedy}$$

$$q < \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow q^n < a_n$$

a opět využijeme VOS, neboť pro $q>1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$

c) analogicky: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty}$
$(a_n > 0)$

(užijeme „úvahy" z $5^*b)$ a $5^*a)$)

Zvolíme $1 < q < a$; pak ex. $n_0 \in N$ tak, že pro $\forall n > n_0$
je $q < \frac{a_{n+1}}{a_n}$, pak tedy $q^{n-n_0} a_{n_0+1} < a_{n+1}$

a protože $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$ pro $q > 1$, užitím VOS
opět máme: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}\right)$

6) „a užití" příkladu 5^*:

a) $\underline{\lim \frac{x^n}{n!} = 0 \text{ pro } \forall x \in R}$: pro $x = 0$ zřejmé,
$x \neq 0$: $a_n = \frac{x^n}{n!}$ a pak

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{1}{n+1} = 0 (< 1)$$

tedy dle 5 a) tvrzení platí.

b) $\lim \frac{n^k}{n!} = 0$, neboť $\left(a_n = \frac{n^k}{n!}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{n+1} = 0 (< 1)$$
(AL)

$$\left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}\Big)^k = 1 \right)$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ pro $a>1$: neboť –

– $a_n = \dfrac{n^k}{a^n}$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \cdot \dfrac{a^n}{n^k} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} \underset{AL}{=} 1 \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} < 1$$

Poznámka: Tyto tři limity v příkladu 6) „srovnávají" rychlosti, se kterými „jdou" do ∞ tři základní posloupnosti (n^k), (a^n), $a>1$, $(n!)$ –

– pokud $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = +\infty$, a $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, pak „asi" (b_n) jde k „∞" „rychleji" – promyslete!
(viz např. příklady podílu polynomů v „n" a jejich limit)

– z uvedených tří posloupností je $(n!)$ nejrychlejší, pak „je" (a^n) a nejpomalejší je (n^k).

A dobrovolně o nekonečných řadách:

1) Připomenutí definice: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost, pak $\sum_1^{\infty} a_n$ konverguje, když existuje $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_1^{N} a_n \in \mathbb{R}$ (jinak $\sum_1^{\infty} a_n$ diverguje).

2) Víte, že geometrická řada $\sum_0^{\infty} q^n$ konverguje $\Leftrightarrow |q|<1$ a pak $\sum_0^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$; $\sum_1^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ konverguje $\Leftrightarrow p>1$.

(1.) Pokuste se sečíst:

a) $\sum_{1}^{\infty} e^{-3n} = \sum_{1}^{\infty} (e^{-3})^n \underset{\text{geom. řada}}{=} e^{-3} \cdot \dfrac{1}{1-e^{-3}} \left(= \dots\right)$

$q = e^{-3} < 1$

b) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{1}^{\infty} (-x^2)^n \underset{\text{geom. řada}}{=} \dfrac{-x^2}{1+x^2}$ pro $|x|<1$

$q = -x^2$ konv. $\Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow$

$x \in (-1,1)$

c) $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}$ (někdy se říká takové řadě „teleskopická")

návod: $\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$

a pak $S_N = \sum_{1}^{N} \dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \cancel{\tfrac{1}{3}} + \cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{5}} + \cancel{\tfrac{1}{5}} + \dots + \cancel{\dfrac{1}{2N-1}} - \dfrac{1}{2N+1}\right)$

a $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2N+1}\right) = \dfrac{1}{2}$

(2) Ukažte, že divergují řady (není splněna nutná podmínka konvergence řad, tj. pro $\sum_{1}^{\infty} a_n$ je to $\lim a_n = 0$)

a) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n$ diverguje, neboť:

$a_n = (-1)^n$, (a_n) limitu nemá

b) $\sum\limits_1^\infty \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^2$: $\lim a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^2 = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} =$

diverguje

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(2+\frac{3}{n}\right)}\right)^2 = \frac{1}{4}$ (AL)

($\neq 0$, tedy řada diverguje)

c) $\sum\limits_1^\infty \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ diverguje, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = 1$ $(\neq 0)$

(3) Z „písemného" cvičení 12.3. máme t.zv. srovnávací kriterium konvergence řad:

$0 \leq a_n \leq b_n$, $\sum\limits_1^\infty b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum\limits_1^\infty a_n$ konverguje

(a odsud též: $\sum\limits_1^\infty a_n$ diverguje $\Rightarrow \sum b_n$ diverguje)

A odtud:

a) $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{3^n\sqrt{n}}$ konverguje, neboť: $\frac{1}{3^n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{3^n}$, $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{3^n}$ konv.

b) $\sum\limits_1^\infty \frac{\sqrt{n}}{2n^2+3}$ konverguje, neboť: $\frac{\sqrt{n}}{2n^2+3} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$,

a $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^{3/2}}$ konverguje

c) $\sum\limits_1^\infty \frac{n+1}{n^2-1}$ diverguje, neboť: $\frac{n+1}{n^2-1} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n}$ diverguje (harmonická řada)

d) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$ diverguje: $\frac{\sqrt{n}}{2n-1} \geq \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$)

a $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \right)$

e) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n^2+1} \right)^2$ konverguje: $\left(\frac{3n}{n^2+1} \right)^2 \leq \left(\frac{3n}{n^2} \right)^2 = \left(\frac{3}{n} \right)^2 = \frac{9}{n^2}$

a $\sum \frac{1}{n^2}$ konverg., tedy

i $\sum_{1}^{\infty} \frac{9}{n^2}$ konverguje

5 Dokažme!

a) $a_n \geq 0$, $\lim \sqrt[n]{a_n} = a < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje (i)

je-li $a > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje (ii)

(i) je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} = a > 1 \overset{(*)}{\Rightarrow} \lim a_n = +\infty$, tedy $\sum a_n$ diverguje

((*) viz příklad 5^*b))

(ii) $\lim \sqrt[n]{a_n} = a < 1 \Rightarrow$ (analogicky k příkladu ve cvičení 12.3)

je-li $a < q < 1$, pak ex. $n_0 \in N$ tak, že

$\sqrt[n]{a_n} < q < 1$ pro $n > n_0$, a tedy $a_n < q^n$, $q < 1$,

$\sum q^n$ konverguje (zde $0 < q < 1$), a tedy (srovnávací kritérium) i $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1 \Rightarrow \sum_1^\infty a_n$ konverguje (i)

$(a_n > 0)$ $\not\exists$-li $a > 1 \Rightarrow \sum_1^\infty a_n$ diverguje (ii)

(ii) opět (ale příkladu 5^*c)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a > 1 \Rightarrow \lim a_n = +\infty \Rightarrow \sum_1^\infty a_n$ diverguje

(není splněna nutná podmínka konverg.)

(i) analogicky k $5^*c)$ dostaneme:

pro $a < q < 1$ ex. n_0 tak, že pro $n > n_0$ je

$$a_{n+1} < q^n \cdot \frac{a_{n_0+1}}{q^{n_0}}, \quad q \in (0,1), \text{ tj.}$$

$$\sum_{n=1}^\infty q^n \left(\frac{a_{n_0+1}}{q^{n_0}}\right) \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_1^\infty a_n \text{ konverguje}$$

(5) Aplikace:

a) $\sum_1^\infty \frac{n^4}{3^n}$ konverguje, neboť $\left(a_n = \frac{n^4}{3^n} \right)$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^4}{3^n}} = \lim \frac{(\sqrt[n]{n})^4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \right)$$

b) $\sum_{0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ konverguje, neboť $\left(a_n = \frac{3^n}{n!} \right)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

a obecněji pro $x>0$ (bylo v definici $e^x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$)

$\sum \frac{x^n}{n!}$ (uvažme pro $x>0$) : $a_n = \frac{x^n}{n!}$,

pak „stejně" $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{x}{n+1} = 0 < 1$,

tj. $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguje pro všechna $x>0$.

(Pro $x<0$ lze využít t.zv. absolutní konvergence řad (neprobírali jsme):
Platí: $\sum_{1}^{\infty} |a_n|$ konverguje $\Rightarrow$ $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje)

c) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n$ konverguje, neboť: $\left(a_n = \left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n \right)$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1$$